

Etapa Final da SELETIVA OLÍMPICA
LigMAT NACIONAL

Gabarito
Níveis 1, 2 e 3



Valor: 300 PONTOS

BRASIL
2026



Realização
**INSTITUTO
PHILOTIMIA**

Apoio



stone

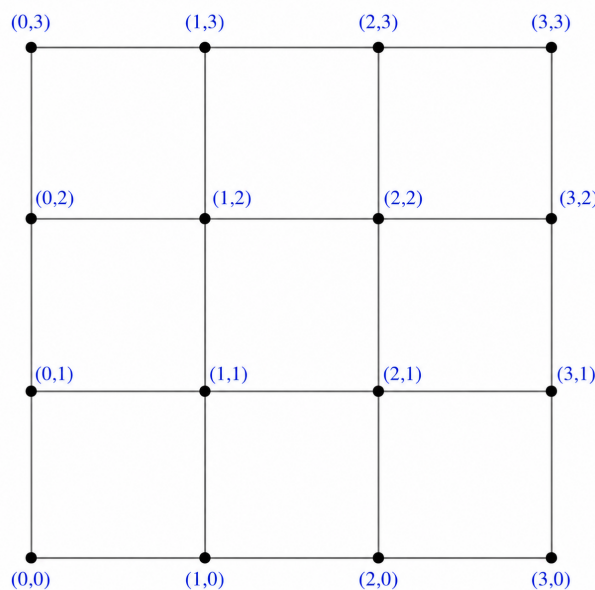


**Brasil
ESCOLA**

Nível 1 – Etapa Final

Questão 1

Uma formiga está andando sobre a malha quadriculada abaixo. Cada ponto da malha está identificado com dois números dentro de parênteses: eles indicam quantos quadradinhos a formiga deve andar para a **direita** e para **cima** para alcançar o respectivo ponto a partir do ponto inicial $(0,0)$.



A formiga sempre se movimenta de um dos três modos a seguir:

1. anda um quadrado para a direita, em cima da linha;
2. anda um quadrado para cima, em cima da linha;
3. anda um quadrado na diagonal para a direita e para cima.

Dois caminhos são considerados diferentes quando a sequência de passos realizada é diferente.

a) Por quantos caminhos diferentes a formiga pode ir do ponto $(0,0)$ até o ponto $(2,2)$? (30 pontos)

Para chegar ao ponto $(2,2)$, a formiga pode utilizar passos para a direita, para cima ou na diagonal.

Se a formiga não utilizar nenhum passo diagonal, precisará dar exatamente dois passos para a direita e dois para cima. Assim, ela realizará 4 passos ao todo, dos quais devemos escolher 2 posições para os passos para a direita. Portanto, existem $\binom{4}{2} = 6$ escolhas, que resulta em 6 caminhos desse tipo. Se a formiga utilizar exatamente um passo diagonal, restará percorrer um quadrado para a direita e um para cima. Nesse caso, os três passos (diagonal, direita e cima) podem ser organizados em qualquer ordem. Logo, existem $3! = 6$ caminhos. Por fim, se a formiga utilizar dois passos diagonais, existe apenas um caminho possível: realizar os dois passos diagonais. Somando os três casos, obtemos $6 + 6 + 1 = 13$. Portanto, existem 13 caminhos diferentes do ponto $(0,0)$ ao ponto $(2,2)$.

b) Por quantos caminhos diferentes a formiga pode ir do ponto $(0,0)$ ao ponto $(3,3)$? (35 pontos)

Para chegar a um ponto (a,b) , o último passo da formiga pode ter vindo de três possibilidades: do ponto $(a-1,b)$ com um passo para a direita, do ponto $(a,b-1)$ com um passo para cima, ou do ponto $(a-1,b-1)$ com um passo na diagonal. Assim, o número de caminhos até (a,b) é a soma dos caminhos até esses três pontos anteriores. Além disso, existe exatamente um caminho para qualquer ponto da borda da malha, pois nesses casos a formiga só pode andar sempre na mesma direção.

$(1,1) = 3$
 $(1,2) = 5$
 $(1,3) = 7$
 $(2,1) = 5$
 $(2,2) = 13$
 $(2,3) = 25$
 $(3,1) = 7$
 $(3,2) = 25$
 $(3,3) = 63$

Portanto, existem 63 caminhos diferentes do ponto $(0,0)$ ao ponto $(3,3)$.

c) Suponha agora que a formiga não possa passar pelo ponto $(1,1)$. Por quantos caminhos diferentes a formiga pode ir do ponto $(0,0)$ até o ponto $(3,3)$? (35 pontos)

Do item anterior, sabemos que existem 63 caminhos do ponto $(0,0)$ ao ponto $(3,3)$. Vamos contar quantos desses caminhos passam pelo ponto $(1,1)$. Para ir de $(0,0)$ até $(1,1)$, a formiga pode fazer três tipos de trajetos: direita e depois cima, cima e depois direita, ou um único passo na diagonal. Portanto, existem 3 caminhos até $(1,1)$. Agora, do ponto $(1,1)$ até $(3,3)$, o problema é idêntico ao de ir de $(0,0)$ até $(2,2)$, pois as diferenças de coordenadas são as mesmas. Do item (a), sabemos que existem 13 caminhos nesse trecho. Assim, o número de caminhos que passam por $(1,1)$ é $3 \times 13 = 39$. Como existem 63 caminhos no total, o número de caminhos que não passam por $(1,1)$ é $63 - 39 = 24$.

Questão 2:

Uma sequência numérica é construída em etapas. No **Passo 0**, a sequência é formada apenas pelo número 1. A partir daí, cada novo passo é obtido copiando integralmente a sequência do passo anterior e, em seguida, acrescentando uma nova cópia dessa sequência, na qual cada elemento foi aumentado em 1.

Os primeiros passos são:

Passo 0: 1

Passo 1: 1 2

Passo 2: 1 2 2 3

Passo 3: 1 2 2 3 2 3 3 4

A) Escreva a sequência obtida no Passo 4. (20 pontos)

Passo 4: [1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 5]

B) Determine a soma de todos os números do Passo 6. (40 pontos)

Primeiramente, precisamos determinar quantas vezes cada número ocorre nos passos 5 e 6. A cada passo, a quantidade de ocorrências de um número é igual à quantidade no passo anterior somada à quantidade de ocorrências de seu antecessor no passo anterior. Por exemplo, no passo 4, há 6 ocorrências do número 3 e 4 do número 2, logo o total de ocorrências do número 3 no passo 5 será $4 + 6 = 10$. Assim, com base no Passo 4 obtido no item anterior, podemos verificar quantas vezes cada número vai ocorrer no passo 6 por meio da tabela abaixo:

Passo \ Número	1	2	3	4	5	6	7
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

A soma de todos os números do passo 6 equivale à soma dos números de 1 a 7, cada um multiplicado pela quantidade de vezes que ocorre. Assim, calculamos:

$$(1 \times 1) + (2 \times 6) + (3 \times 15) + (4 \times 20) + (5 \times 15) + (6 \times 6) + (7 \times 1) = 256$$

C) Determine quantas vezes o número 4 aparece no Passo 10. (40 pontos)

Para entender quantas vezes o número 4 aparece no Passo 10, observamos que a cada etapa o número só aumenta quando escolhemos a parte “somada em 1”.

Como começamos no número 1, para chegar ao número 4 é necessário somar exatamente 3 vezes ao longo dos 10 passos.

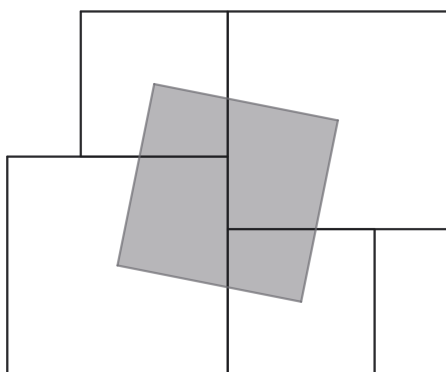
Cada escolha de quais 3 passos serão os momentos em que somamos 1 gera uma ocorrência do número 4.

Logo, o número de ocorrências de 4 é igual ao número de maneiras de escolher 3 posições entre 10, isto é, $10 \text{ escolhe } 3 = 120$. Portanto, o número 4 aparece 120 vezes no Passo 10.

Questão 3:

(Geometria)

Silvino possui quatro quadrados, dois de cada tamanho. A medida do lado de cada quadrado é um número inteiro, e a soma dos perímetros dos quatro quadrados é igual a 80 cm. Ele os organizou conforme a figura a seguir, cujo perímetro externo mede 44 cm. Em seguida, desenhou o quadrilátero cujos vértices são os centros dos quatro quadrados. A figura resultante é o quadrado em cinza.



a) Determine a medida do lado dos dois quadrados menores e dos dois quadrados maiores. (30 pontos)

Como os lados têm medidas inteiras, e os perímetros dos quatro quadrados somam 80 cm, as somas de um lado de cada quadrado devem totalizar 20 cm, e como há dois pares de quadrados com lados de mesma medida, a soma entre o maior e menor lado deve ser 10 cm. Por inspeção com as possibilidades no caso da figura acima, pode-se chegar à resposta.

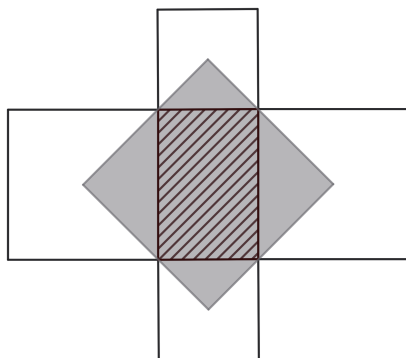
Menores: 4 cm.

Maiores: 6 cm.

b) Determine a área do quadrado cinza. (40 pontos)

Considerando as simetrias do problema, pode-se verificar que o quadrado cinza ocupa um quarto da área de cada quadrado. Logo, basta somar as áreas dos quatro quadrados e dividir por quatro, levando ao resultado. 26 cm^2 .

c) Na sequência, Silvino rearranjou os quatro quadrados, obtendo a configuração mostrada a seguir, na qual a região entre os quadrados forma o retângulo hachurado (com as linhas diagonais), e novamente traçou um quadrilátero usando os centros dos quatro quadrados como vértices, formando o quadrado em cinza. Determine a área do novo quadrado cinza. (30 pontos)



De modo análogo ao item anterior, pode-se verificar que a sobreposição do quadrado cinza ocupa exatamente um quarto da área de cada quadrado. Somando-se com a área do retângulo de lados 6 cm e 4 cm ao centro, chega-se à resposta.
50 cm².

Nível 2 – Etapa Final

Questão 1:

No escritório da LigMAT existem infinitas salas, cada uma identificada por um número natural maior que 0 (zero) escrito em sua porta. Certo dia, decide-se pintar cada porta de azul ou de branco, de acordo com as seguintes regras:

1. A porta 1 está pintada de azul.
2. Se um número natural é múltiplo de um número cuja porta é branca, então sua porta também será branca.
3. Se a porta correspondente a um número natural é azul, então a porta correspondente a qualquer divisor positivo desse número também será azul.
4. Se todas as portas correspondentes aos divisores primos de um número natural são azuis, então a porta correspondente a esse número também será azul.

A) Sabe-se que a porta de número 30 é azul. Quais são todos os números menores ou iguais a 12 cujas portas são necessariamente azuis? (30 pontos)

Sabendo que se um número é azul, todos os seus números primos também serão azuis, segue que: $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$, logo, todos os números que possam ser formados apenas por fatores 3, 2 e 5, também são azuis. Portanto, os números menores ou iguais a 12 que são azuis são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12.

B) Explique por que, ao definir quais números primos têm suas portas pintadas de azul, a cor de todas as demais portas fica completamente determinada pelas regras acima. (30 pontos)

Ao definir quais números primos são azuis, segue que todas as portas formadas apenas por fatores azuis também são azuis. Em contrapartida, todos os primos não azuis são brancos, visto que todas as portas devem ser pintadas com uma das cores. Logo, todos os números que possuam ao menos um fator branco, também são brancos.

C) Suponha que todos os números primos maiores que 7 possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes podemos pintar as portas de modo que a porta 84 seja branca e a 75 seja azul? (40 pontos)

Sabendo que se um número é azul, todos os seus fatores primos também serão azuis, segue que: $75 = 3 \times 5 \times 5$. Logo, os primos 3 e 5 são necessariamente azuis.

Por outro lado, para que um número seja branco, basta que ele possua pelo menos um fator primo branco.

Como $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ e o fator 3 já é azul, a porta 84 será branca se pelo menos um dos primos 2 ou 7 for branco.

Analisando as possíveis cores dos primos 2 e 7, temos as seguintes combinações:

2 branco e 7 branco;

2 branco e 7 azul;

2 azul e 7 branco.

A combinação em que 2 e 7 são ambos azuis não é possível, pois nesse caso todos os fatores primos de 84 seriam azuis, o que faria a porta 84 ser azul.

Assim, existem 3 maneiras de escolher as cores dos primos 2 e 7.

Além disso, o enunciado afirma que todos os números primos maiores que 7 possuem a mesma cor. Essa cor pode ser azul ou branca, gerando 2 possibilidades independentes das escolhas anteriores.

Portanto, o número total de maneiras de pintar as portas é $3 \times 2 = 6$. Portanto, existem 6 maneiras diferentes de pintar as portas de modo que a porta 84 seja branca e a porta 75 seja azul.

Questão 2:

Um número de quatro algarismos ABCD é chamado **prismático** quando o produto do algarismo das unidades de milhar (A) pelo algarismo das unidades (D) é igual ao número de dois algarismos BC, formado pelos algarismos das centenas e das dezenas. Além disso, os algarismos B e C devem ser diferentes de zero.

Por exemplo, 2147 é um número prismático, pois $2 \times 7 = 14$.

a) Determine o maior número prismático possível. (10 pontos)

Para obter o maior número prismático possível, precisamos maximizar o valor de ABCD sob a restrição $AD = 10B + C$. Como BC é um número de dois algarismos formado por B e C, ele deve ser o maior possível, mas ainda igual a um produto AD com A e D entre 1 e 9. O maior produto possível de dois algarismos entre 1 e 9 ocorre quando tomamos $A = 9$ e $D = 9$, obtendo 81. Assim, temos $BC = 81$, logo $B = 8$ e $C = 1$. Portanto, o maior número prismático possível é 9819.

b) Determine todos os números prismáticos cujo algarismo dos milhares é 2. (20 pontos)

$A = 2$, $2D = 10B + C$. Como $2D$ é no máximo 18, o número BC só pode ser 10, 12, 14, 16 ou 18, com B entre 1 e 9 e C entre 1 e 9. Se $D = 5$, temos $2 \times 5 = 10$, então $BC = 10$, mas C não pode ser zero, logo inválido.

Se $D = 6$, temos $2 \times 6 = 12$, então $B = 1$ e $C = 2$.

Se $D = 7$, temos 14, então $B = 1$ e $C = 4$.

Se $D = 8$, temos 16, então $B = 1$ e $C = 6$.

Se $D = 9$, temos 18, então $B = 1$ e $C = 8$.

Logo: 2126, 2147, 2168, 2189.

c) Determine todos os números prismáticos que possuem exatamente dois algarismos distintos. (30 pontos)

Testando os pares possíveis, encontramos duas situações:

Se $A = 5$ e $D = 5$, então $AD = 25$, logo $B = 2$ e $C = 5$. Isso gera o número 5255, que é prismático e possui exatamente os dígitos 2 e 5.

Se $A = 6$ e $D = 6$, então $AD = 36$, logo $B = 3$ e $C = 6$. Isso gera o número 6366, que é prismático e possui exatamente os dígitos 3 e 6.

d) Existem números prismáticos que continuam sendo prismáticos após a inversão de seus algarismos, isto é, quando **ABCD** se transforma em **DCBA**? Em caso afirmativo, determine todos eles; em caso negativo, justifique a impossibilidade. (40 pontos)

Se ABCD é prismático, temos:

$$AD = 10B + C.$$

Se DCBA também é prismático, então:

$$DA = 10C + B.$$

Como $A \times D = D \times A$, igualamos as duas expressões:

$$10B + C = 10C + B.$$

Reorganizando, obtemos:

$$9B = 9C, \text{ logo } B = C.$$

Substituindo na condição inicial, temos:

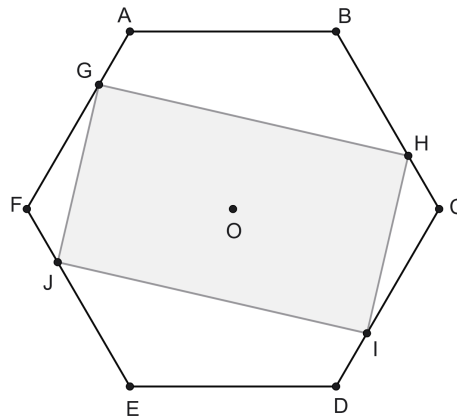
$$AD = 11B.$$

Ou seja, o produto AD deve ser múltiplo de 11.

Como 11 não é permitido como algarismo, não existe nenhuma decomposição válida de AD em algarismos de 1 a 9. Portanto, não existem números prismáticos que permaneçam prismáticos após a inversão dos seus algarismos.

Questão 3:

Na figura, o hexágono $ABCDEF$ é regular e tem lados medindo 9 cm. O ponto O é o centro do hexágono. Sobre os lados FA , BC , CD e EF estão os pontos G , H , I e J , respectivamente, de modo que $GA = HC = ID = JF$. O segmento HI mede 8 cm.



a) Calcule a razão entre GO e IO e a razão entre HO e JO . (25 pontos)

Obs.: nesta questão, a *razão* entre dois segmentos é o quociente entre seus comprimentos e deve ser apresentada na forma de fração irredutível. Por exemplo, se um segmento XY mede metade do segmento YZ , então a razão entre seus comprimentos é $1/2$.

Por LAL, pode-se verificar que $\triangle OFG$ e $\triangle OCI$ são congruentes, logo $\frac{GO}{IO} = 1$. Analogamente, $\triangle OFJ$ e $\triangle OCH$ são congruentes, logo $\frac{HO}{JO} = 1$.

b) Calcule a soma dos comprimentos das diagonais GI e HJ . (25 pontos)

Considere pontos auxiliares X e Y sobre os lados AB e ED , tais que $XB = YE = GA$. Note que $XHIYJG$ é hexágono regular de centro O , logo GI e HJ são as diagonais maiores de um hexágono regular com lado medindo $HI = 8$ cm. Portanto, $GI + HJ = GO + OI + HO + OJ = 4 \times 8$ cm = 32 cm.

c) Determine a *razão* entre as áreas do quadrilátero $GHIJ$ e do hexágono $ABCDEF$. (50 pontos)

Com base no hexágono construído no item anterior, pode-se verificar que $XHIYJG$ e $ABCDEF$ são polígonos semelhantes, com razão de semelhança entre seus lados dada por $\frac{8}{9}$. Logo a área de $XHIYJG$ será $(\frac{8}{9})^2$ da área de $ABCDEF$. Por sua vez, o retângulo $GHIJ$ corresponde a $\frac{2}{3}$ da área de $XHIYJG$. De fato, dividindo $XHIYJG$ em seis triângulos equiláteros em torno de O , o retângulo $GHIJ$ compreende dois triângulos e quatro meios triângulos, com área equivalente a $2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$ triângulos do hexágono. Portanto a razão entre as áreas é calculada por:

$$R = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{128}{243}.$$

Nível 3 – Etapa Final

Questão 1:

Diz a crença popular que a sexta-feira 13 é um dia de infortúnios... mas não para um matemático! Para ele, a ocorrência dessa data é um fenômeno determinado pelas propriedades do *Calendário Gregoriano*. Para analisar a frequência desse evento, considere as seguintes regras:

- **O Ciclo Solar:** Um ano comum possui 365 dias, enquanto um ano bissexto possui 366 dias (com a inclusão do dia 29 de fevereiro).
- **A Regra da Bissextilidade:** Um ano é bissexto se for múltiplo de 4, com as seguintes exceções: anos centenários (terminados em "00") só são bissextos se forem múltiplos de 400. Por exemplo, 1900 não foi bissexto, mas 2000 foi.
- **A Periodicidade:** O ciclo das datas e dias da semana se repete exatamente a cada 400 anos. Por exemplo, se 22 de janeiro de 950 d. C. caiu em uma quinta-feira, então o dia 22 de janeiro 1350 d. C. também caiu em uma quinta-feira.

a) Com base na Regra da Bissextilidade, quantos anos bissextos existem em um ciclo completo de 400 anos? (20 pontos)

Pela regra da bissextilidade, um ano é bissexto se for múltiplo de 4, exceto os centenários, que só são bissextos quando também são múltiplos de 400. Em um ciclo de 400 anos, os múltiplos de 4 são 400 dividido por 4, que resulta em 100 anos. Desses 100, os centenários são os múltiplos de 100, que são 4 no total: os anos 100, 200, 300 e 400 do ciclo. Desses 4 centenários, apenas o ano 400 é múltiplo de 400, e portanto apenas ele continua sendo bissexto. Os outros 3 centenários deixam de ser bissextos. Portanto, o número de anos bissextos em um ciclo de 400 anos é $100 - 3$, que resulta em 97 anos bissextos.

B) Qual é o maior número de sextas-feiras 13 que podem ocorrer em um mesmo ano? (30 pontos)

Todo ano tem exatamente 12 dias de número 13, um por mês. Para saber em qual dia da semana cada um cai, basta contar quantos dias se passaram desde o dia 1º de janeiro até o dia 13 de cada mês, e verificar qual é o resto da divisão desse número por 7, já que a semana se repete a cada 7 dias.

O dia 13 de janeiro é 12 dias após o dia 1º de janeiro. Como $12 = 1 \times 7 + 5$, o dia 13 de janeiro cai 5 dias depois do mesmo dia da semana que o dia 1º de janeiro. O dia 13 de fevereiro é 43 dias depois, e $43 = 6 \times 7 + 1$, então cai 1 dia depois. O dia 13 de março é 71 dias depois, e $71 = 10 \times 7 + 1$, também 1 dia depois. Abril dá resto 4, maio dá resto 6, junho dá resto 2, julho dá resto 4, agosto dá resto 0, setembro dá resto 3, outubro dá resto 5, novembro dá resto 1 e dezembro dá resto 3.

Juntando esses valores, a lista de "quantos dias depois da semana de 1º de janeiro" cada dia 13 cai é: 5, 1, 1, 4, 6, 2, 4, 0, 3, 5, 1, 3. Contando quantas vezes cada valor aparece, o valor 1 aparece 3 vezes, correspondendo a fevereiro, março e novembro. Todos os outros valores aparecem no máximo 2 vezes.

Isso significa que, se 1º de janeiro cair em uma quinta-feira, então os dias 13 de fevereiro, março e novembro cairão todos numa sexta-feira ao mesmo tempo, pois quinta-feira mais 1 dia é sexta-feira. Em ano bissexto, os meses a partir de março ganham um dia a mais no cálculo, mas o máximo obtido continua sendo 3. Portanto, o máximo de sextas-feiras 13 que podem ocorrer em um único ano é 3.

C) Determine o número total de sextas-feiras 13 que ocorreram entre 1º de janeiro de 1601 e 31 de dezembro de 2000. (Sabe-se que 1º de janeiro de 1601 foi uma segunda-feira). (50 pontos)

O período entre 1º de janeiro de 1601 e 31 de dezembro de 2000 compreende exatamente 400 anos, ou seja, um ciclo completo do Calendário Gregoriano. Portanto, basta analisar esse único ciclo.

Em um ciclo de 400 anos existem 303 anos comuns e 97 anos bissextos. O dia da semana em que cada ano começa depende apenas do deslocamento causado pelos anos anteriores: um ano comum desloca o início do ano seguinte em 1 dia da semana, enquanto um ano bissexto desloca em 2 dias.

A partir de 1º de janeiro de 1601, que foi uma segunda-feira, podemos classificar os anos do ciclo conforme o dia da semana em que começam. A contagem obtida é:

Início do ano	Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb
Comum	43	43	44	43	44	43	43
Bissexto	15	13	14	14	13	15	13

Para cada uma dessas possibilidades, contamos quantas sextas-feiras 13 existem no ano. Um ano comum que começa em uma quinta-feira, por exemplo, possui 3 sextas-feiras 13, enquanto os demais casos possuem 1 ou 2. Fazendo a soma correspondente:

$$43 \times 2 + 43 \times 2 + 44 \times 2 + 43 \times 1 + 44 \times 3 + 43 \times 1 + 43 \times 1$$

para os anos comuns, obtendo

$$521$$

e

$$15 \times 3 + 13 \times 2 + 14 \times 1 + 14 \times 2 + 13 \times 2 + 15 \times 1 + 13 \times 1$$

para os anos bissextos, obtendo

$$167.$$

Logo, o total de sextas-feiras 13 no ciclo é

$$521 + 167 = 688$$

Portanto, entre 1º de janeiro de 1601 e 31 de dezembro de 2000 ocorreram 688 sextas-feiras 13.

Questão 2:

Fixados um número real $k > 0$ e um inteiro $n \geq 2$, dizemos que números reais não negativos $x_1, x_2, \dots, x_n$ formam um **ciclo radical** de parâmetro k se:

$$x_1 = \sqrt{x_2 + k}, x_2 = \sqrt{x_3 + k}, \dots, x_n = \sqrt{x_1 + k}$$

Além disso, seja

$$M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$$

a raiz positiva da equação $t^2 = t + k$.

a) Para $n = 2$, $k = 6$ e $x_1 = 3$, determine x_2 . (10 pontos)

Pela definição de ciclo radical, $x_1 = \sqrt{x_2 + k}$. Substituindo os valores dados, temos $3 = \sqrt{x_2 + 6}$. Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos $9 = x_2 + 6$, portanto $x_2 = 3$.

b) Para $n = 3$ e $k = 6$, determine um valor possível de $x_1 + x_2 + x_3$. (20 pontos)

Com $n = 3$, o sistema é: $x_1 = \sqrt{x_2 + k}$, $x_2 = \sqrt{x_3 + k}$ e $x_3 = \sqrt{x_1 + k}$. Substituindo $k = 6$ e $x_1 = 3$, $x_3 = \sqrt{x_1 + 6} = 3$. $x_2 = x_3 = \sqrt{x_3 + 6} = 3$. Por fim, $x_1 = \sqrt{x_2 + 6} = 3$.

Portanto, $x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 3 + 3 = 9$.

C) Para $n = 3$, determine todos os valores de $k > 0$ para os quais existe um **ciclo radical** de parâmetro k cujos termos são inteiros positivos. (30 pontos)

O sistema de equações, quando elevado ao quadrado, torna-se: $x_1^2 = x_2 + k$, $x_2^2 = x_3 + k$ e $x_3^2 = x_1 + k$. Antes de buscar soluções inteiras, é preciso mostrar que qualquer ciclo radical com $n = 3$ obriga os três termos a serem iguais.

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $x_2^2 - x_1^2 = x_3 - x_2$, ou seja,

$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -(x_2 - x_3)$. Agora, suponha que $x_1 > x_2$. O lado esquerdo é negativo, o que implica que $x_2 - x_3$ é positivo, ou seja, $x_2 > x_3$. Subtraindo a segunda da terceira equação e repetindo o argumento, conclui-se que $x_3 > x_1$. Mas isso forma a cadeia $x_1 > x_2 > x_3 > x_1$, o que é uma contradição. O mesmo raciocínio se aplica se supusermos $x_1 < x_2$. Logo, $x_1 = x_2 = x_3$.

Com todos os termos iguais a um mesmo valor x , a equação $x^2 = x + k$ fornece $k = x^2 - x = x(x - 1)$. Para que k seja positivo e x seja inteiro positivo, é necessário que x seja pelo menos 2. Os valores de k que surgem são então $2 \times 1 = 2$, $3 \times 2 = 6$, $4 \times 3 = 12$, $5 \times 4 = 20$, e assim por diante.

Portanto, os valores de k para os quais existe um ciclo radical com termos inteiros positivos são exatamente os da forma $k = m(m - 1)$, com m inteiro e $m \geq 2$, ou seja, $k \in \{2, 6, 12, 20, 30, \dots\}$.

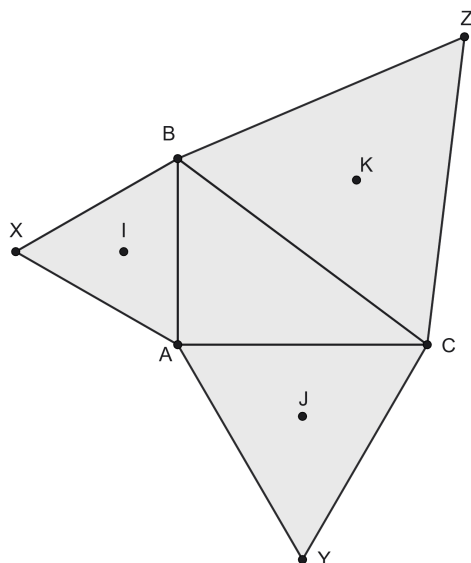
D) Para $n = 3$, determine a soma $x_1 + x_2 + x_3$ em função de k . (40 pontos)

Como foi demonstrado no item anterior, qualquer ciclo radical com $n = 3$ tem necessariamente $x_1 = x_2 = x_3$. Esse valor comum, chamado de M , satisfaz a equação $M^2 = M + k$, que é exatamente a equação cuja raiz positiva define M no enunciado. Portanto, $x_1 = x_2 = x_3 = M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$.

A soma $x_1 + x_2 + x_3$ é então igual a $3M$, ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{1 + 4k})$.

Questão 3:

Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A , com as medidas dos catetos dadas por: $AB = 3$ e $AC = 4$. Sejam $\triangle ABX$, $\triangle ACY$ e $\triangle BCZ$ triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados de $\triangle ABC$. Sejam I, J e K os centros de $\triangle ABX$, $\triangle ACY$ e $\triangle BCZ$, respectivamente.



a) Determine a razão entre os comprimentos BY e CX . (20 pontos)

Inicialmente, note que Y, A e I são colineares. Além disso, $IB = IX$, e uma vez que $\hat{AIB} = \hat{AIX} = 120^\circ$, temos que $\triangle YIB$ e $\triangle YIX$ são congruentes. Logo $YB = YX$. De modo análogo, verificamos que X, A e J são colineares, $JC = JX$ e $\angle AJC = \angle AJY = 120^\circ$. Logo, $\triangle XJC$ e $\triangle XJY$ são congruentes, e $XY = XC$. Por fim, tomando a razão, temos: $\frac{BY}{CX} = \frac{XY}{XY} = 1$.

b) Determine a razão entre os comprimentos BY e IJ . (Sugestão: considere uma rotação em torno de um vértice conveniente). (20 pontos)

Rotacionando 30° em torno de A de modo que o ponto I recaia em I' sobre o lado AB , tem-se que J recai em J' sobre o lado AY . Além disso, como $\frac{AB}{AI'} = \frac{AY}{AJ'} = 3$, tem-se que $\triangle AIJ$ e $\triangle AI'J'$ são congruentes e $\triangle ABY$ e $\triangle AI'J'$ são semelhantes com razão de semelhança 3. Logo, $\frac{BY}{IJ} = 3$.

c) Calcule a área do triângulo $\triangle IJK$, formado pelos centros dos três triângulos equiláteros externos. (60 pontos)

Pode-se verificar, por rotações semelhantes para JK e KI em torno de B ou C , que $\triangle IJK$ é equilátero (alternativamente, o fato é consequência do Teorema de Napoleão). Logo, sua área é dada por $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Resta determinar l^2 . No triângulo $\triangle AIJ$, temos que $AI = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $AJ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$, e $\hat{IAJ} = 150^\circ$. Pode-se verificar por Lei dos Cossenos que:

$$l^2 = \left(3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(4 \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \cos(150^\circ),$$

$$l^2 = \frac{3^2}{3} + \frac{4^2}{3} - 2 \times (3 \times 4) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5^2}{3} + (3 \times 4) \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Alternativamente à Lei dos Cossenos, seja I'' projeção ortogonal de I sobre AX . Então AI'' mede $\frac{3}{2}$, e J, A e I'' são colineares. Logo $\triangle IJI''$ forma um triângulo retângulo com catetos $I'I'' = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{6}$ e

$JI'' = (JA + AI'') = \left(4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)$. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$l'^2 = IJ'^2 = II''^2 + JI''^2$, chega-se ao mesmo resultado.

Por fim, substituindo l'^2 no cálculo da área, obtemos a expressão:

$$A = \left(\frac{5^2}{3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{12} + 3 \approx 6,608.$$